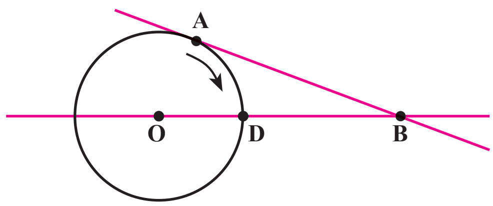
دکتر محرم نژاد ایردموسی

چند مسئله از حد در زمینه‌های گوناگون

در کتاب حسابان یا ریاضی ۲ با مفهوم حد تاحدودی آشنا شده‌اید. می‌خواهیم با ذکر چند مثال به درک بیشتری از مفهوم حد برسیم. از یک مثال هندسی شروع می‌کنیم.



مثال ۱. دایرهٔ C به مرکز O و شعاع واحد مفروض است. خطی افقی از مرکز می‌گذرانیم تا دایره را در نقطهٔ D قطع کند. خط دیگری در نقطه A بر دایره مماس می‌کنیم تا خط افقی را در نقطهٔ B قطع کند. حال نقطهٔ A را روی دایره به نقطهٔ D نزدیک می‌کنیم. طول دو پاره‌خط AB و DB چه تغییری می‌کنند؟ با نزدیک شدن A به D، پاره‌خط‌های AB و DB کوچک‌تر می‌شوند و طول آن‌ها به سمت صفر می‌رود. حال می‌خواهیم ببینیم نسبت $\frac{AB}{DB}$ به سمت چه عددی می‌رود. چه حدسی می‌زنید؟ صورت و مخرج این کسر هر دو در حال کاهش هستند و به سمت صفر می‌روند، اما نسبت آن‌ها چطور؟ برای حل این مسئله و یافتن $\lim\limits_{A\to D}\frac{AB}{DB}$، ابتدا باید مقدار کسر را برحسب یک متغیر مناسب نمایش دهیم.

فرض کنید: $|DB|=x$. در این صورت: $|OB|=1+x$ و در مثلث قائم‌الزاویه OAB خواهیم داشت:

$$AB=\sqrt{OB^2-OA^2}=\sqrt{(1+x)^2-1}=\sqrt{x^2+2x}$$

در نتیجه:

$$\lim_{A\to B}\frac{AB}{DB}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+2x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sqrt{1+\frac{2}{x}}}{x}=\lim_{x\to 0}\sqrt{1+\frac{2}{x}}$$

با نزدیک شدن x به صفر، $\frac{2}{x}$ به سمت $+\infty$ می‌رود و حد فوق $+\infty$ خواهد بود. بنابراین: $\lim\limits_{A\to D}\frac{AB}{DB}=+\infty$. یعنی این نسبت با نزدیک شدن نقطهٔ A به B، به سمت $+\infty$ می‌رود.

مثال ۲. معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2+2x+1=0$ را در نظر بگیرید و فرض کنید a عددی در بازه $(0,1)$ است. اگر دلتای معادله را محاسبه کنید، خواهید دید:

$$\Delta=b^2-4ac=4-4a>0$$

پس معادله دو ریشه دارد. x_1 را ریشهٔ بزرگ‌تر و x_2 را ریشهٔ کوچک‌تر فرض کنید. می‌خواهیم بررسی کنیم که با میل کردن a به صفر، x_1 و x_2 به سمت چه عددی می‌روند:

$$x_1=\frac{-2+\sqrt{4-4a}}{2a}\Rightarrow \lim_{a\to 0^+}(x_1)=\lim_{a\to 0^+}\frac{\sqrt{4-4a}-2}{2a}$$

$$=\lim_{a\to 0^+}\frac{(\sqrt{4-4a}-2)(\sqrt{4-4a}+2)}{2a(\sqrt{4-4a}+2)}$$

$$=\lim_{a\to 0^+}\frac{4-4a-4}{2a(\sqrt{4-4a}+2)}=\lim_{a\to 0^+}\frac{-4a}{2a(\sqrt{4-4a}+2)}=-\frac{1}{2}$$

پس با میل کردن a به صفر از سمت راست، ریشهٔ بزرگ‌تر به $-\frac{1}{2}$ میل می‌کند. دقت کنید که $-\frac{1}{2}$ ریشهٔ معادلهٔ $2x+1=0$ است. حال حد ریشهٔ کوچک‌تر را پیدا کنیم. می‌دانیم: $x_1x_2=\frac{1}{a}$.

در نتیجه:

$$\lim_{a\to ۰^+} x_۲ = \lim_{a\to ۰^+}\frac{۱}{x_۱ a} = \lim_{a\to ۰^+}\frac{-۲}{a}$$

با نزدیک شدن a به صفر، مخرج کسر کوچک و کوچک‌تر می‌شود. در نتیجه $\frac{-۲}{a}$ به سمت $-\infty$ می‌رود! به عنوان تمرین می‌توانید بررسی کنید که با میل کردن a به عدد ۱، ریشه‌ها به سمت چه اعدادی می‌روند.

مثال ۳. دنبالهٔ زیر از عددهای حقیقی را در نظر بگیرید:

$$\sqrt{۲}, \sqrt{۲+\sqrt{۲}}, \sqrt{۲+\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}, \ldots$$

این دنباله را دنبالهٔ $\{a_n\}$ می‌نامیم. شاید کنجکاو شده باشید که حد این دنباله وقتی n به سمت بی‌نهایت می‌رود، چقدر است، فرض کنید: $\lim_{n\to+\infty} a_n = L$. یعنی بی‌نهایت رادیکال تودرتو نوشته‌ایم (این عمل غیرممکن است اما برای لحظه‌ای فرض کنید که بی‌نهایت بار رادیکال نوشته‌اید). پس:

$$L = \sqrt{۲+\sqrt{۲+\sqrt{۲+\sqrt{\ldots}}}}$$

دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$L^۲ = ۲+\sqrt{۲+\sqrt{۲+\sqrt{\ldots}}}$$

جملهٔ دوم طرف راست همان L است. (چرا؟) در نتیجه: $L^۲=L+۲$. با حل این معادله به ریشه‌های $L=۲$ و $L=-۱$ می‌رسیم. اما ریشه ۱- قابل قبول نیست. پس: $L=۲$.

یک نکتهٔ جالب دیگر دربارهٔ این دنباله آن است که همهٔ جملات دنباله گنگ هستند. اما حد دنباله عددی گویاست.

مثال ۴. دنبالهٔ زیر از عددهای حقیقی را در نظر بگیرید:

$$\frac{[\sqrt{۲}]}{۱}, \frac{[۲\sqrt{۲}]}{۲}, \frac{[۳\sqrt{۲}]}{۳}, \ldots$$

جملهٔ عمومی این دنباله برابر است با: $a_n = \frac{[n\sqrt{۲}]}{n}$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید: همه جملات دنباله اعدادی گویا هستند. حال حد دنباله را در نظر بگیریم. این دنباله به سمت چه عددی می‌رود؟

می‌دانیم: $x-۱<[x]\le x$. در نتیجه:

$$n\sqrt{۲}-۱<[n\sqrt{۲}]\le n\sqrt{۲}$$

با تقسیم طرفین نامساوی بر n خواهیم داشت:

$$\sqrt{۲}-\frac{۱}{n}<\frac{[n\sqrt{۲}]}{n}\le\sqrt{۲}$$

از طرف دیگر: $\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{۲}-\frac{۱}{n})=\sqrt{۲}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{۲}$

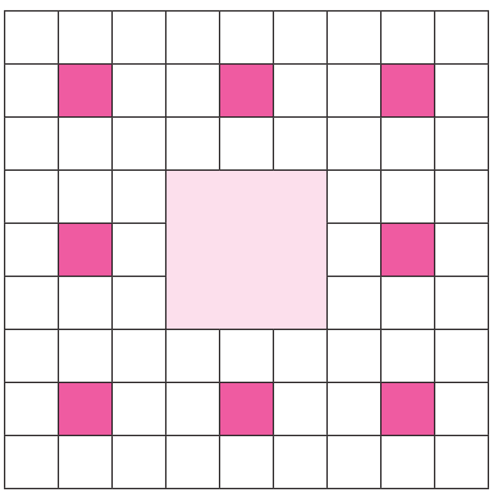
. در نتیجه طبق قضیهٔ فشردگی باید داشته باشیم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[n\sqrt{۲}]}{n}=\sqrt{۲}$$

(قضیهٔ فشردگی بیان می‌کند که اگر دنباله‌ای بین دو دنبالهٔ دیگر محصور باشد و آن دو دنباله حد یکسانی داشته باشند، آن‌گاه دنبالهٔ محصور بین آن دو هم ناچاراً به حد آن دو میل می‌کند.)

مشاهده می‌کنید که در اینجا دنباله‌ای با جملات گویا به عددی گنگ میل می‌کند.

مثال ۵. مربعی به ضلع ۱ مفروض است. در مرحلهٔ اول آن‌را به ۹ مربع کوچک‌تر به ضلع $\frac{۱}{۳}$ افراز و مربع وسط را رنگ می‌کنیم. در مرحلهٔ دوم هر کدام از ۸ مربع رنگ نشده را به ۹ مربع کوچک‌تر افراز و مربع وسط را رنگ می‌کنیم. می‌خواهیم بررسی کنیم که اگر این مراحل را تا بی‌نهایت تکرار کنیم، چه کسری از مربع رنگ خواهد شد.



راه حل: در پایان مرحلهٔ اول مساحت رنگ شده برابر $\frac{۱}{۹}$ است. در پایان مرحلهٔ دوم مساحت رنگ شده برابر

$S=\frac{۱}{۹}+\frac{۸}{۹}\times\frac{۱}{۹}$ اســت. بنابراین با ادامهٔ این مراحل تا بی‌نهایت مساحت رنگ شده برابر خواهد شد:

$$S=\frac{۱}{۹}+\frac{۸}{۹}\times\frac{۱}{۹}+(\frac{۸}{۹})^{۲}\times\frac{۱}{۹}+...$$

حال به محاسبهٔ S می‌پردازیم:

$$S=\frac{۱}{۹}+\frac{۱}{۹}\times\frac{۸}{۹}+\frac{۱}{۹}(\frac{۸}{۹})^{۲}+...$$
$$=\frac{۱}{۹}+\frac{۸}{۹}(\frac{۱}{۹}+\frac{۱}{۹}\times\frac{۸}{۹}+\frac{۱}{۹}\times(\frac{۸}{۹})^{۲}+...)$$
$$=\frac{۱}{۹}+\frac{۸}{۹}S\Rightarrow S=\frac{۱}{۹}+\frac{۸}{۹}S\Rightarrow S-\frac{۸}{۹}S=\frac{۱}{۹}\Rightarrow S=۱$$

یعنی کل مساحت مربع رنگ خواهد شد!

مثال ۶. دنبالهٔ فیبوناچی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$F_{۱}=F_{۲}=۱,\ F_{n}=F_{n-۱}+F_{n-۲}(n\geq ۳)$

نسبت جملات متوالی این دنباله، یعنی $\frac{F_{n+۱}}{F_{n}}$ وقتی n به $+\infty$ میل می‌کند، به چه عددی نزدیک می‌شود؟

راه حل: فــرض کنیــد: $\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+۱}}{F_{n}}=L$. در این صورت: $\lim_{n\to\infty}(\frac{F_{n}+F_{n-۱}}{F_{n}})=L$.

بنابراین: $۱+\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n-۱}}{F_{n}}=L$. اما: $\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n}}{F_{n-۱}}=\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+۱}}{F_{n}}=L$.

در نتیجه:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n-۱}}{F_{n}}=\frac{۱}{L}$$

پس باید داشــته باشــیم: $۱+\frac{۱}{L}=L$. با حل این معادله به مقدار L می‌رسیم:

$$۱+\frac{۱}{L}=L\Rightarrow L\ \ -L-۱=۰\Rightarrow L=\frac{۱\pm\sqrt{۵}}{\ }$$

چون: $\frac{F_{n+۱}}{F_{n}}>۰$. پس: $L=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$. یعنی نسبت جملات متوالی دنبالهٔ فیبوناچــی به عدد طلایی میل می‌کند.

مثال‌های فوق نشــان می‌دهند، حــد توابع یا حد دنباله‌ها ممکن است عددهایی دور از انتظار باشند، اما محاسبهٔ حد به کمک قوانین و قضایای حد، این امکان را فراهم می‌کند که بتوانیم رفتار حدی توابع و دنباله‌ها را کشف کنیم.

در پایان چند مســـئله برای حل توسط شما ارائه می‌کنیم:

مسئلهٔ ۱. دنبالهٔ زیر را در نظر بگیرید:

$\sqrt{۲},\sqrt[۳]{۲},\sqrt[۴]{۲},...$

۱. جملهٔ عمومی دنباله را بنویسید.

۲. حــد جملهٔ عمومی را وقتی کــه n به $+\infty$ میل می‌کند، به‌دست آورید.

مسئلهٔ ۲. معادلهٔ $x^{۲}+ax+۱=۰$ مــفروض است، به‌طوری که: $a>۲$.

۱. نشان دهید معادله دو ریشهٔ حقیقی دارد.

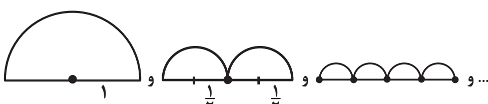
۲. وقتی: $a\to ۲^{+}$، ریشهٔ بزرگ‌تر به سمت چه عددی می‌رود؟ ریشهٔ کوچک‌تر چطور؟

۳. وقتی: $a\to +\infty$، ریشــهٔ بزرگ‌تر به ســمت چه عددی می‌رود؟

مسئلهٔ ۳. می‌دانیــم: $\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x}=۱$. در اینــجا x برحسب رادیان است. اگر x برحسب درجه باشد، آن‌گاه حد فوق چه عددی خواهد شد؟

مسئلهٔ ۴. به نظر شما مقدار $[۰/\bar{۹}]$ چقدر است؟

مسئلهٔ ۵. در دنبـــالهٔ تصویری زیر، در هـر مرحله نیم‌دایره‌هـــای مرحلهٔ قبل را بـــا دو نیم‌دایره کوچک‌تر عــوض کرده‌ایــم. مجموع محیط و مجموع مســاحت نیم‌دایره‌های هر مرحله به سمت چه عددی می‌روند؟



مسئلهٔ ۶. دنبالهٔ هندسی $a_{n}=(\frac{۱}{۲})^{n}$ مفروض است.

۱. اگر S_{n} مجموع n جملهٔ اول دنبالهٔ a_{n} باشد، S_{n} را برحسب n به‌دست آورید.

۲. ثابت کنید: $\lim_{n\to\infty}S_{n}=۱$.

مسئلهٔ ۷.

۱. ثابت کنید مثلثی با طــول اضلاع $۱+x$، $۲+x$ و $۳+x$ وجود دارد $(x\in R^{+})$.

۲. فرض کنید Δ_{x} مثلثی با طول اضلاع قسمت قبل باشد، با میل کردن x به صفر، شکل مثلث Δ_{x} به چه شکلی تبدیل می‌شود؟